№ 11-дәріс.

Тақырыбы: Қатар қосындысы. Салыстыру белгілері.

Сандық қатарлар.

Анықтама 1. Берілген шектеусіз сандар тізбегі $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ үшін:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \qquad (1)$$

өрнегі сандық қатар деп аталады, мұндағы $a_i, i = 1, 2, ...$ сандары – қатардың мүшелері.

$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n, n = 1, 2, ...$ саны қатардың бөлік қосындысы деп аталады.

Анықтама 2. Егер $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, шегі табылатын болса, онда S (1) қатарының қосындысы деп аталады.

Анықтама 3. Қатар жинақты деп аталады, егер S тұрақты санға тең болса, кері жағдайда, яғни, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ шегі шексіздікке тең болса немесе табылмаса, онда қатар жинақсыз деп аталады.

Мысал 1. Қатардың қосындысын тап $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$.

Шешуі. Қатардың жалпы мүшесі:

$$a_n = \frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right).$$

Алынған формуланы қолданып, қатардың n -ші бөлік қосындысын табайық :

$$S_n = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + ... + a_n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 6} + ... + \frac{1}{(n-1)(n+2)} + \frac{1}{n(n+3)}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + ... + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right).$$

Сонымен,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{18}.$$

Ендеше, берілген қатар жинақты және оның қосындысы $S = \frac{11}{18}$.

Мысал 2. $a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ...,\quad a \neq 0$ түріндегі қатарды (геометриялық прогрессия) қарастырайық. Онда бөлік қосынды:

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$$

1) Егер $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$

2) Егер $|q| > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |q^n| = \infty \Rightarrow \frac{a - aq^n}{1-q} \to \pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ - табылмайды.

3) Егер $|q| = 1$, онда

а) $q = 1 \Rightarrow\ a + a + ... + a + ... \Rightarrow\ S_n = n \cdot a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n \cdot a = \infty$ ($a > 0$ болса)

б) $q = -1 \Rightarrow\ a - a + a - a + ... \Rightarrow\ S_n = 0$, егер n-жұп болса және $S_n = a$, егер n-тақ болса, $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n$ - табылмайды.

Сонымен, қатар $|q| < 1$ болғанда ғана жинақты.

Қатардың соңғы мүшелерін лақтырып тастағаннан оның жинақтылығы өзгермейді. Жинақты қатар:

$a = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$

$b = b_1 + b_2 + ... + b_n + ...$.

үшін келесі теңдіктер орынды:

а) $ca = ca_1 + ca_2 + ... + ca_n + ...$, $c - const$

б) $a \pm b = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + ... + (a_n + b_n) + ...$

Теорема 1.Қатардың жинақтылығының қажетті шарты. (1) қатары жинақты болуы үшін $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ болуы қажетті.

Мысал 3. $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + ... + \frac{n}{2n+1} + ...$ қатары жинақсыз, себебі қатардың жинақтылығының қажетті шарты орындалмайды: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$.

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ болу шартынан қатардың жинақты екені шықпайды.

Таңбасы оң қатарлар.

2-мысалда көрсетілгендей S_n бөлік қосындысының ақырлы формуласын анықтау кей жағдайларда қиындық туғызуы мүмкін. Сондықтан, қатардың жалпы мүшесін білу ғана жеткілікті болатын қатардың жинақтылығының жеткілікті белгілерін білген жөн. Тек қана таңбалары оң қатарлар үшін ғана ақиқат болатын белгілерге тоқталайық.

Мүшелері оң сандар болатын қатарларды қарастырамыз:

$$a = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \quad (2)$$

$$b = b_1 + b_2 + ... + b_n + ... \quad (3)$$

Теорема 2. Салыстыру белгілері:

1.Егер қандай да бір N нөмірінен бастап, $a_n \le b_n$, $n = N, N+1,...$ теңсіздігі орынды болса, онда

а) (3) қатарының жинақтылығынан (2) қатарының жинақты екені шығады,

б) (2) қатарының жинақсыздығынан (3) қатарының жинақсыз екені шығады.

2. Егер $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0$ ақырлы шегі табылса, онда (1) және (2) қатарлары не екеуі де бірдей жинақты, не екеуі де бірдей жинақсыз.

Мысал 4. Қатарды жинақтылыққа зертте:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^n} + ... \quad (4)$$

Жинақты (мысал 1, $q = \frac{1}{2}, a = 1$) болатын

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^n} + ...$$

қатарын қарастыралық, $n \geq 2$ үшін: $\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^n}$ болғандықтан, $\frac{1}{2^2} \leq \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^3} < \frac{1}{2^3}, \ldots,$ ендеше (4) қатары жинақты.